Tentamen Complexe Analyse
03/11/09, 14:00-17:00 uur
Het boek mag bij dit tentamen niet gebruikt worden.

1. Laat $P(z)$ een polynoom zijn met reële coefficiënten. Toon aan dat als z een nulpunt is van P dat dan ook $\bar{z}$ een nulpunt is.

2. a. Laat $F(z)$ een functie zijn die analytisch is in het complexe vlak behalve in de pool z_1. Wat is de convergentiestraal van de bijbehorende Taylorreeks rond het punt $z_0 \neq z_1$.

   b. Geef een machtreeks met convergentiestraal 7.

3. Gegeven de verzameling $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

   a. Voor welk punt(en) in D bereikt $|2z^2 + i|$ zijn maximum.

   b. Voor $a, b \in \mathbb{C}$ bepaal het maximum van $|az^2 + b|$ in D.

4. Bereken de integraal
$$\oint_\Gamma z e^{1/z} \cos(1/z) dz,$$
waar de contour Γ de eenmaal in positieve richting (tegen de klok in) doorlopen eenheidscirkel rond $z = 0$ is.

5. Bereken de Fourier-integraal
$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 1} dt$$
met behulp van residuenrekening. Geef duidelijk aan welke contouren je gebruikt. Hint: Is $G(\omega)$ even in ω?

6. Definieer de 2π-periodieke functie $F(t)$ door
$$F(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < 0 \\ -1, & 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

   a. Bepaal de complexe Fouriercoefficienten c_n voor $F(t)$.

   b. Bepaal $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ voor elke $t \in [-\pi, \pi]$.

   c. Bepaal $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$.